Math 265B: Euler's Method

Goal: Estimate the solution to the IVP y'(x) = x - y - 2, y(0) = 1 at y(2)

Make a "Polygonal Approximation" of the solution curve

١	1	1	1	1	1	1	'	(1	,	(1	`	,	¹	`	`	`	`	`	1	`	-	
١.	١	١	7	١	١	١	١	١	\mathbf{N}	١	١	N	\	\	N	\mathbf{i}	\mathbf{i}	\mathbf{N}	`	\sim	~	~	-	-
	١	١.	1.5	١	١	١	١	١	\mathbf{N}_{i}	١	١	N	\	\	X	1	>	>	>	~	-	-	—	-
	١	١	١	١	١	١	١	١	\mathbf{v}_{i}	١	١	N	١	\	1	\mathbf{i}		~	~	~	_	_	_	-
	١.					1			N			1		\mathbf{x}	1	\mathbf{i}	\sim	~	`		<u> </u>	_	-	/
	١	١	Ň	1	١	١	١	١	\mathbf{N}	١	\	N	\mathbf{n}	\mathbf{i}	1	<	~	-	_	_	_	/	/	/
	١	١	١	1	١	١	1	١	\mathbf{N}	\	\mathbf{n}	1	\mathbf{i}	<	~	~	~	_	_	_	/	/	/	,
	1	1).ş			1			N	~	~	~			~			_			/	/	/	,
	١	١	١	1	١	\	\	\	\mathbf{x}	\	<	~	<	~	-	_	_	_	/	/	/	/	/	,
	\	١	١	1	\	\mathbf{n}	\	\	\mathbf{n}	<	<	1	~	~	-	_	_	/	/	/	1	/	/x	,
	7/5	\	h	$\overline{\mathbf{x}}$		6	5\		M	~	~	<u>کہ</u>	_	_	-	~	/	25	/	/	2	/	/	>,
	1	\	Ň	1	1	1	`\	~	~	~	~	_	_	_	2	/	_	2	/	/	1	/	1	,
ľ	,	Ì.			、				1	~	_		_	_	2	/	/	/	/	,	1	,	,	j,
• · · ·	ζ.	··· <u>≻</u> ().9 \		``````````````````````````````````````	`			1	_	_	_	_	/	/	1	1	,	1	1	,	1	1	ĺ,
[(ì	Ì	ĺ,	Ì		_	_		_	_		_	,	1	΄,	΄,	í,	΄,	΄,	í,	΄,	',	ĺ
Ì	Ì.			Ì.		Ì								í.,	í,	í.,	, .	1	<i>.</i> ,	· ,.	í,		<i>'</i> ,	ĺ
È	Ì		_	$\left \right\rangle$	2						_		ĺ,	΄,	1	΄,	΄,	έ,	΄,	΄,	έ,	΄,	',	1
1)				_	_	_	_	-	/		<i></i>	<i></i>	1	<i>′</i> .	<i>′</i> .	1	1	΄.	1	1	1	1
ì	`		1.5	1	`	_	_	_	-	1	_	1	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	/	1
	1	>	2	1	-	-	-	-	1	/	/	1	/	/	1	/	/	1	/	/	/	/	/	1
-	1	>	`	-	-	-	-	/	1	/	/	1	/	/	1	/	/	1	/	/	1	1	/	1
	`	-	-2		-	-	1	1	1	1	1	1	1	1	1	. /	1	1	. /	. /	1	. /	. /	1
-	<u>.</u>	~		L.,				1	1	1	1	1.	/				1	1	1	1	1	1	1	

Euler's Method:

We want to estimate $y(x_{final})$ given the IVP y' = f(x, y), $y(x_0) = y_0$

Process:

- 1. Locate a **point** (start at the IC, (x_0, y_0)).
- 2. Find the **slope** of the solution curve at that point, using $y' = \frac{dy}{dx} = slope$
- 3. Find Δy : $\Delta y = m \cdot \Delta x$
- 4. **Project** forward to a new point, using the fact that $x_{k+1} = x_k + \Delta x$ and $y_{k+1} = y_k + \Delta y$
- 5. Continue this process until you reach the target x-value.
 - Each iteration of this process is called a "step".
 - The Δx value is called the "step-size". (The variable h is more commonly used for step-size.)
 - The number of steps needed is given by $\frac{x_{final} x_{initial}}{\Delta x}$

Step	Point		m = Slope	Change in y	Project to New Point		
k	$x = x_k = y_k$		$y'(x) = f(x_k, y_k)$	$\Delta y = m \cdot \Delta x$	$x_{k+1} = x_k + \Delta x$	$y_{k+1} = y_k + \Delta y$	

Example: Use Euler's method, by hand, to estimate the solution to the IVP y' = x - y - 2, y(0) = 1 at y(2) using the following step sizes: , and $\Delta x = .5$ Illustrate the polygonal approximation on the slope field.

 $\Delta x = 1$

Step	Point		Slope	Change in y	Project to New Point			
k	$x_k y_k$		y' = x - y - 2	$\Delta y = m \cdot \Delta x$	$x_k + \Delta x$	$y_k + \Delta y$		

 $\Delta x = .5$

Step	Point		Slope	Change in y	Project to New Point			
k	$x_k y_k$		y'(x)	$\Delta y = m \cdot \Delta x$	$x_k + \Delta x$	$y_k + \Delta y$		

١	1	`	1	`	`	1	`	`	1	`	`	ì	`	`	ì	`	ì	ì	ì	`	ì	`	`	
	1	1	1.5	<u> </u>	1	1	\	1	<u>\</u>	\ \	``	N.	``	``	<u>``</u>	``	\sim	\mathbf{i}	\sim	\sim	\geq	`		
١	١	١	Ĭ	1	١	١	١	١	١	١	١	1	١	\	Ň	\	\mathbf{i}	\mathbf{i}	\mathbf{i}		\sim	-	-	-
١	١	١	١	1	١	١	١	١	\mathbf{V}_{i}^{i}	١	١	1	١	\mathbf{i}	\mathbf{i}	\mathbf{i}	\mathbf{i}	\mathbf{i}	`	~	-	-	-	-
	1			11	1.	1			ι Λ			Ň	\sim	\sim	\sim	\sim	\sim	>	<u>`</u>		1. 1. 1.	_	/	-
١	١	١	١	1	١	١	١	١	\mathbf{N}_{i}	١	\	1	\mathbf{i}	\mathbf{i}	\mathbf{i}	\mathbf{i}		-	-	-	-	/	/	1
١	١	١	١	1	١	١	١	١	N	\	\	N	\mathbf{i}	\mathbf{i}	>	`	`	-	-	-	/	/	/	/
(١	· \ (D.Ş	1	1	١	\sim	N.	N	\sim	\sim	\mathbf{i}	1		~	-	-	-	_	/	/	/	/	1
ι.	١	١	١		١	١	\	\	\mathbf{N}	\mathbf{i}	\mathbf{i}	~	>	~	-	_	_	-	/	/	/	/	/	1
ι.	١	١	١		١	١	\	\	\mathbf{N}	\mathbf{i}	\	~	~	~	-	-	-	/	/	/	/	/	⁄χ	1
-(). F	\	Ò	\setminus	\	0	5\	\	M		>	1.5	`	-	ź	~	1	2:5	/	/	3⁄	/	/	1
١.	\	\	\mathbf{i}	$ \rangle$	\	\mathbf{i}	1	\mathbf{i}	1			-	-	-	-	/	/	/	/	/	1	/	/	1
\ \		\ <u>\</u> (\ فر			\ \	$\langle \rangle$	$\left \right\rangle$	1	$\left \right\rangle$	\sim	1	_	_		/	/	,	/	/	1	///	/	1
۱ ۱ ۱	\ \ \	\ ~ <u>\</u> (\ 6.0 \	\ \ \	\ \ \	111	111	111	1 1 1	1 1 1	/ /	1-1-1-			1 1 1	/////	////	///	/ // /	/ // /	111	/ // /	/ / /	' ' '
\ \ \	\ \ \ \	\ . <u>\</u>	/ 6.0 /	1111	\ \ \ \	~ ~ ~ ~ ~	1111	////	1111	/ / /					1 1 1 1	///////////////////////////////////////	///////////////////////////////////////	1111	/ / / /	/ / / /	///////////////////////////////////////	/ / / /	/ / / /	1111
	\ \ \ \ \ \		/ 6.0 / / /	1111	/////	11111	/////	/////	/////	/////		1 1 1 1 1	1 1 1 1 1		11111	- 1 - 1 - 1	//////	//////	///////////////////////////////////////	//////	//////	/ / / /	/ / / / /	1111
	///////		/ / / / / / / / / / / / / / / / / / /	111111	//////	111111	//////	//////	///////////////////////////////////////	11111	11111	1 1 1 1 1 1	1 1 1 1 1 1		111111	11111	//////	//////	//////	//////	///////	///////	///////////////////////////////////////	,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,
	///////////////////////////////////////	/ / / / / / /	/ / / / / / / / / / / / / / / / / / / /	1111111	///////////////////////////////////////	////////	///////////////////////////////////////	///////////////////////////////////////	///////////////////////////////////////	111111	1111111	1111111			111111	////////	///////////////////////////////////////	////////	///////////////////////////////////////	///////////////////////////////////////	///////////////////////////////////////	///////////////////////////////////////	1 1 1 1 1 1 1	, , , , , , , , , , , , , , , , , , , ,
	///////////////////////////////////////	///////////////////////////////////////	/ か/ / イ / /5/	///////////////////////////////////////	///////////////////////////////////////	///////////////////////////////////////	///////////////////////////////////////	///////////////////////////////////////	////////////	///////////	11111111	11111111			1111111	///////////////////////////////////////	///////////////////////////////////////	///////////////////////////////////////	///////////////////////////////////////	///////////////////////////////////////	///////////////////////////////////////	///////////////////////////////////////	///////////////////////////////////////	, , , , , , , , , , , , , , , , , , , ,
		///////////////////////////////////////	1 10/14/15/1	///////////////////////////////////////	/ / / / / /	~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~	///////////////////////////////////////	~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~	////////////	~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~	~ ~ ~ ~ ~ ~ / / / / /	11111111	/////		11111111	~ / / / / / / / / / /	///////////////////////////////////////	///////////////////////////////////////	///////////////////////////////////////	///////////////////////////////////////	///////////////////////////////////////	///////////////////////////////////////	///////////////////////////////////////	
		///////////////////////////////////////	ハロンマンマン15/1 で	///////////////////////////////////////	///////////////////////////////////////	~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~	~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~	~ ~ / / / / / / / / / /	/////////////	~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ ~ / / / /	~ ~ ~ ~ ~ / / / / /		/ / / / / /		- / / / / / / / / / /		///////////////////////////////////////	///////////////////////////////////////	///////////////////////////////////////	///////////////////////////////////////	///////////////////////////////////////	///////////////////////////////////////	///////////////////////////////////////	

Now use the GeoGebra program to confirm your answers above and to continue the process $\Delta x = .1 \Delta x = .05$

Error Analysis

Put all of your <u>estimations</u> in the table below.

Then determine the <u>actual value</u> of y(2) using the fact that the analytical solution to the IVP is $y = x + 4e^{-x} - 3$.* *Note: Wolfram will solve the IVP for you. Use the command "Solve" followed by the IVP

Finally, determine the error. Remember: Error = Estimate – Actual

Δx	Euler's Estimate	Actual value of	Error
	y(2)	y(2)	

If the step size is reduced by a factor of 10, what effect does this appear to have on the error?

How efficient is this process?